

# Primer parcial de Lógica

Grado en Matemáticas

25 de octubre de 2017

---

1. (2 puntos) Sean  $\Sigma$  una signatura y  $\varphi$  y  $\psi$  dos fórmulas proposicionales cuyos símbolos de proposición atómica pertenecen a  $\Sigma$ . Define (de manera formal y rigurosa) los siguientes conceptos:

- a) Valoración sobre  $\Sigma$ .
- b) Modelo de  $\varphi$
- c)  $\varphi$  es una tautología.
- d)  $\varphi$  es satisfacible.
- e)  $\psi$  es consecuencia lógica de  $\varphi$  ( $\varphi \models \psi$ ).
- f)  $\varphi$  es equivalente a  $\psi$  ( $\varphi \equiv \psi$ ).

Nota: Puedes suponer que, dadas una valoración  $u$  y una fórmula  $\varphi$ , está definido  $(\varphi)^u$ , el valor de verdad de  $\varphi$  bajo la valoración  $u$ , no necesitas definir este concepto. Salvo esto, procura que tus definiciones sean autocontenidas.

2. a) (1,5 puntos) Formaliza mediante lógica proposicional el siguiente razonamiento (obteniendo una única fórmula que lo represente):

*Bebo agua sólo cuando tengo sed y no tengo cerveza. No tengo sed a menos que coma demasiado. Cuando como demasiado no bebo agua. Por tanto, si no tengo cerveza, no bebo agua.*

b) (1,5 puntos) Determina si el razonamiento es correcto. Nota: Construir la tabla de verdad completa (con todas sus filas) se valorará menos que una solución en la que se evite esto tratando varias de esas filas a la vez.

3. Consideramos en el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  la siguiente relación binaria  $R$ :

$$aRb \Leftrightarrow a \cdot b = 1$$

- a) (1 punto) Determina justificadamente si  $R$  cumple cada una de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.
- b) (0,75 puntos) Añade a  $R$  la menor cantidad posible de pares para obtener una relación de equivalencia  $S$ . Nota: Añade sólo pares que no estén en la relación, no hagas añadidos redundantes.
- c) (0,75 puntos) Dada la relación de equivalencia  $S$  que has obtenido en el apartado anterior, para cada  $a \in \mathbb{Q}$ , describe la clase de equivalencia de  $a$  respecto de la relación  $S$ . Di cuántos elementos tiene cada una de esas clases. Pista: Cuidado con las excepciones.
- d) (0,5 puntos) ¿Es  $R$  una función de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$ ? En caso de que tu respuesta sea negativa, ¿es posible añadir pares a  $R$  para obtener una función biyectiva? Justifica tus respuestas.

4. (2 puntos) Sea  $L$  el conjunto de las fórmulas bien construidas de la lógica proposicional. Define por recursión una función  $f : L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  que, dada  $\varphi \in L$ , devuelva el número total de hojas del árbol estructural de  $\varphi$ . Nota: Se recuerda que se define *hoja* como un vértice del árbol estructural de grado 1 que no coincide con la raíz.